



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## **MAPA DO CÍRCULO FORÇADO E SINCRONIZAÇÃO**

### **RELATÓRIO FINAL DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA (PIBIC/CNPq/INPE)**

Felipe Rodrigues Nogueira de Souza (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)  
E-mail: [feliperns@gmail.com](mailto:feliperns@gmail.com)

Elbert E. N. Macau (LAC/CTE/INPE, Orientador)  
E-mail: [elbert@lac.inpe.br](mailto:elbert@lac.inpe.br)

Julho de 2008

# MAPA DO CÍRCULO FORÇADO E SINCRONIZAÇÃO

Felipe Rodrigues Nogueira de Souza<sup>1</sup> (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)  
Elbert E. N. Macau<sup>2</sup> (LAC/INPE, Orientador)

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explorar a dinâmica do denominado mapa do círculo (que para certos parâmetros consiste em uma aproximação razoável para o pêndulo forçado) e suas propriedades como número de rotação, travamento de fase e as diversas rotas para o comportamento caótico, bem como a relação do mesmo com as “Línguas de Arnold” e a “Escadaria do Diabo”. Será analisado também um sistema composto pelo acoplamento de um mapa do círculo com uma forçante periódica, e determinadas as condições sobre os parâmetros dos sistemas para que ocorra sincronização entre o mapa do círculo e a forçante.

---

<sup>1</sup> Aluno do Curso de Engenharia de Computação, ITA. **E-mail: feliperns@gmail.com**

<sup>2</sup> Pesquisador do Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada. **E-mail: elbert@lac.inpe.br**

# **SUMÁRIO**

## **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

## **CAPÍTULO 2 – DESENVOLVIMENTO**

2.1 O Mapa do Círculo

2.2 Sincronização

2.3 Mapa do Círculo sob Forçante

2.4 Mapa do Círculo sob ação mútua de outro mapa

## **CAPÍTULO 3 – DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS**

## **CAPÍTULO 4 – CONCLUSÕES**

## **CAPÍTULO 5 – BIBLIOGRAFIA**

## 1. INTRODUÇÃO

O chamado mapa do círculo é um sistema dinâmico discreto simples, mas que para certos valores de seus parâmetros, apresenta uma dinâmica relativamente complexa, com vários dos elementos característicos de sistemas dinâmicos mais complexos, como o chamado travamento de fase (phase-locking). Além disso, em certas situações, o mapa do círculo pode ser considerado uma boa aproximação para o comportamento do pêndulo simples (forçado e amortecido).

Neste trabalho, vamos estudar através de simulações, algumas possibilidades para a sincronização do mapa do círculo, sob o efeito de uma forçante 'periódica' externa, ou sob o efeito mútuo de outro mapa do círculo.

## 2. DESENVOLVIMENTO

### 2.1 O Mapa do Círculo

Para certos parâmetros do pêndulo forçado, o chamado mapa do círculo pode ser considerado uma aproximação razoável para o pêndulo. O mapa do círculo, ao invés de uma equação diferencial, consiste numa função que leva o estado atual ao posterior, com o tempo discretizado:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \left(\frac{k}{2\pi}\right) \text{sen}(2\pi\theta_n), \theta_n \in [0, 1[$$

O ângulo é considerado no intervalo de 0 a 1, por convenção (equivalente a considerar o intervalo de 0 a  $2\pi$ , apenas seriam necessárias pequenas modificações na equação acima).

Tal função pode ser considerada como uma função do círculo de raio unitário nele mesmo. Consideremos primeiro o caso linear, com  $k = 0$ . Para um  $\Omega = \frac{p}{q}$  racional ( $p$  e  $q$  primos entre si), temos um movimento periódico, e após  $q$  iterações, o mapa realiza  $p$  ciclos. Dizemos que o número de rotação (winding number) é  $W = p/q$ . Para  $\Omega$  irracional, temos que o ângulo nunca retorna ao seu valor inicial exato. Contudo, temos que para algum  $n$  natural, o valor  $n\Omega$  se aproxima arbitrariamente de um inteiro, logo o ângulo se aproxima arbitrariamente do valor inicial, por isso tal movimento é chamado de quasiperiódico.

Quando adicionamos o “acoplamento” não-linear (isto é,  $k$  diferente de zero), é possível manter o comportamento periódico (após um transiente inicial) mesmo quando  $\Omega$  é irracional, o chamado fenômeno de travamento de fase (phase-locking), o movimento fica “travado” em um número de rotação racional. De modo geral, o número de rotação é definido para o mapa do círculo como:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta_n - \theta_0}{n} \right) \text{ (aqui não devemos considerar } \theta_n \text{ restrito a } [0, 1[ \text{).}$$

O diagrama abaixo, que indica para um par de parâmetros se o número de rotação é racional (branco, phase-locked) ou não é chamado de “Línguas de Arnold” (Arnold Tongues).

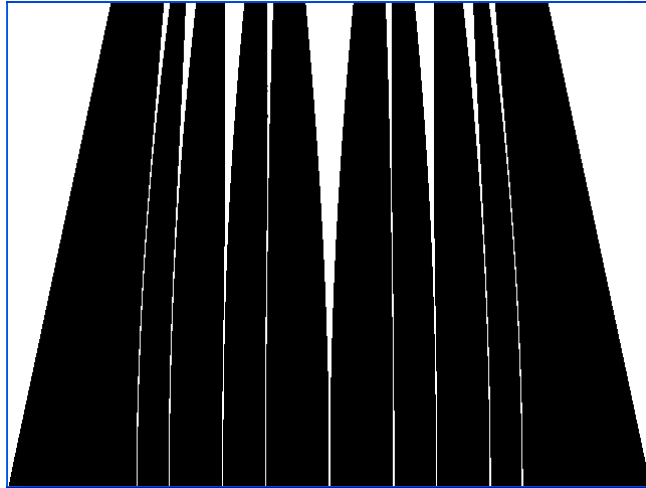


Figura 1: Línguas de Arnold relativas às regiões dos seguintes números de rotação, em ordem:  $(0, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1)$ .

Note que conforme o valor de  $k$  cresce, aumentam os intervalos com número de rotação racional. Existe um número infinito destes intervalos, embora no diagrama estejam apenas os que possuem denominador menor ou igual a 5.

## 2.2 Sincronização

Por sincronização entre dois osciladores, entendemos que a partir de certo instante de tempo, as fases de ambos os osciladores tenham valores bastante próximos. No entanto, esta é uma situação bastante difícil de ser atingida. Uma medida menos restritiva de sincronização é considerar os osciladores sincronizados quando o número de rotação de ambos é (aproximadamente) igual. Isto significa que, embora em pequena escala os osciladores possam ter variações diferentes na fase, em maior escala as fases dos osciladores evoluem da mesma maneira (embora possam diferir por uma constante).

## 2.3 Mapa do Círculo sob Forçante

Agora vamos analisar o efeito de uma força periódica externa sobre o mapa do círculo. Como visto anteriormente, o mapa do círculo é dado por:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \left(\frac{k}{2\pi}\right) \text{sen}(2\pi\theta_n) \text{ mod } 1$$

A força periódica é:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Omega_s$$

Considerando que a força tem um efeito proporcional ao ângulo sobre o mapa do círculo, temos:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \left(\frac{k}{2\pi}\right) \text{sen}(2\pi\theta_n) + e\phi_n \pmod{1}$$

Nas simulações abaixo, fixamos os valores de  $k$  e  $\Omega$  e calculamos o número de rotação para vários valores de  $\Omega_s$  (variando de 0 a 1, eixo horizontal) e do acoplamento  $e$  (variando de 0 a 1, eixo vertical). Os valores em vermelho nos diagramas indicam a igualdade dos números de rotação (com tolerância de 0.1%):

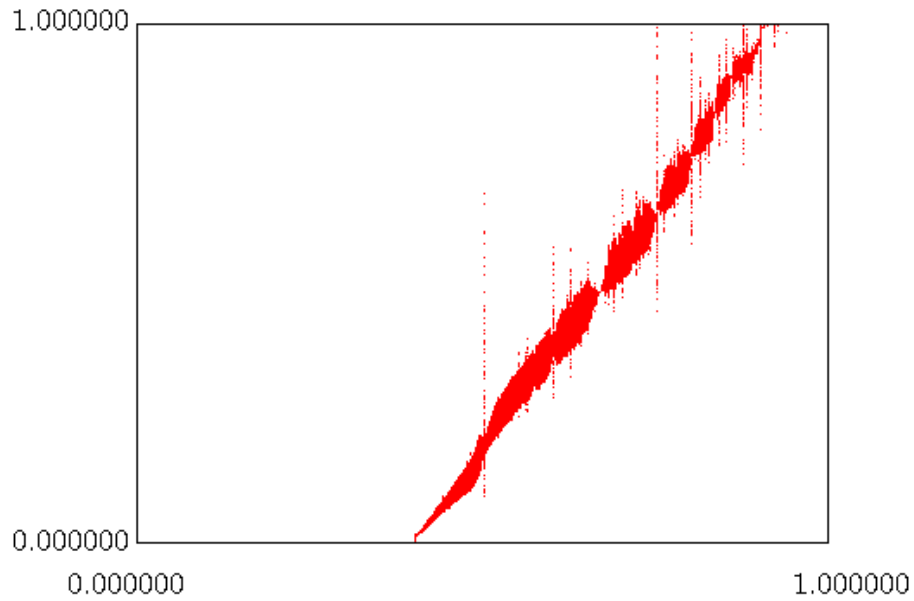


Figura 2(a):  $k = 0.95$  e  $\Omega = 0.4040040004\dots$

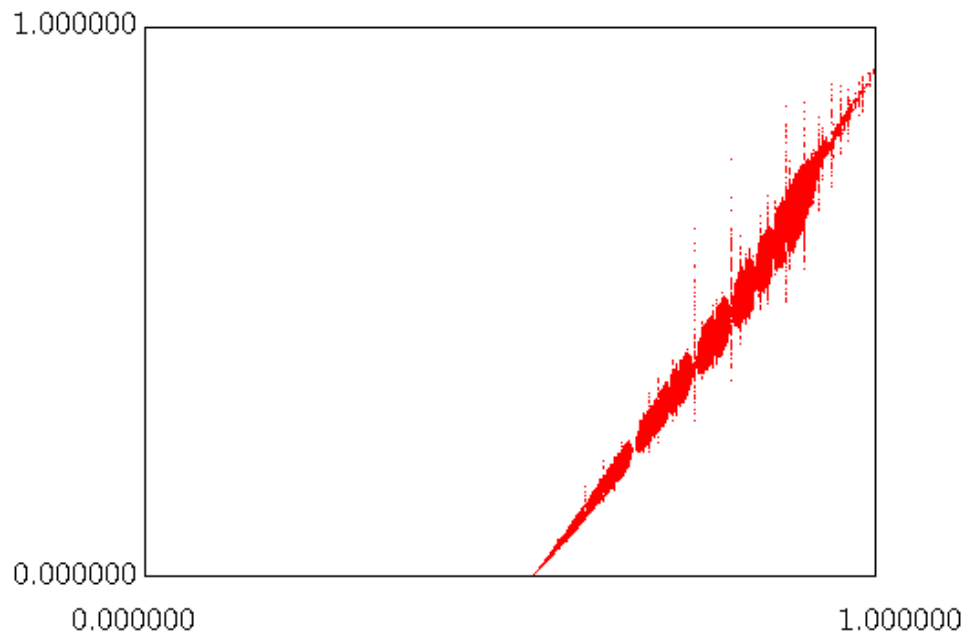


Figura 2(b):  $k = 0.8$  e  $\Omega = 0.535$

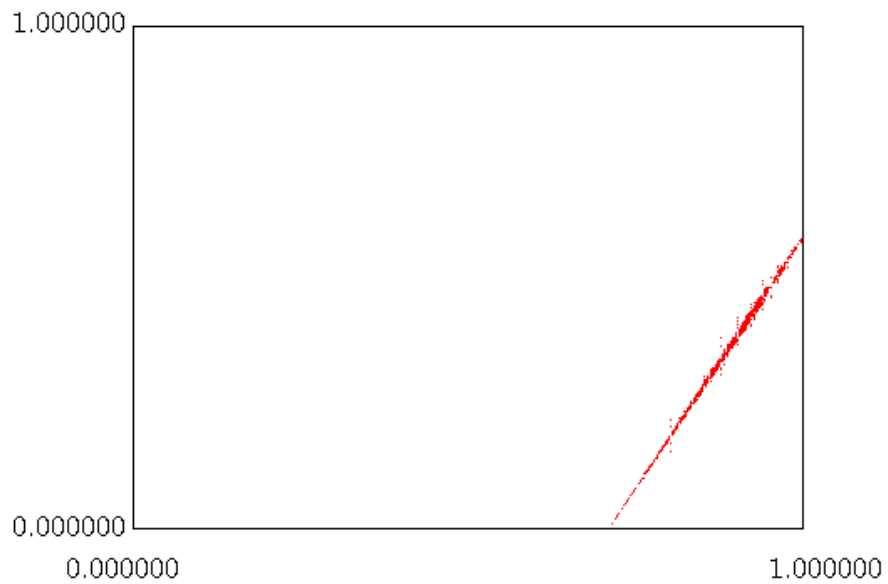


Figura 2(c):  $k = 0.1$  e  $\Omega = 0.707106 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$

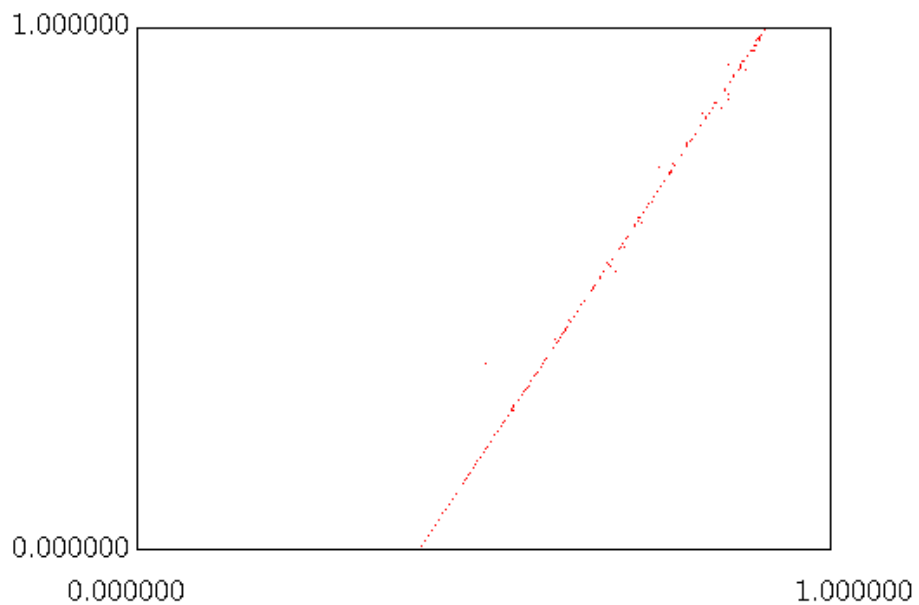


Figura 2(d):  $k = 0$  e  $\Omega = 0.4040040004\dots$

Note que a “quantidade” de valores em que houve sincronização foi decrescente com o valor de  $k$ , ou seja, o termo não-linear no mapa do círculo auxiliou a sincronização com a forçante.

Nos casos de sincronização, temos que o número de rotação do mapa do círculo (forçado) deve ser igual ao número de rotação da forçante (que é igual a  $\Omega_s$ ). Assim, temos que a maior parte dos casos de sincronização tem um número de rotação irracional, ou seja, sincronizam



em órbitas quasiperiódicas (lembre-se de que no referimos a um significado mais fraco de sincronização, pelo número de rotação).

Analisando mais de perto as figuras, podemos observar uma estrutura que aparenta ser auto-similar (uma propriedade de fractais):

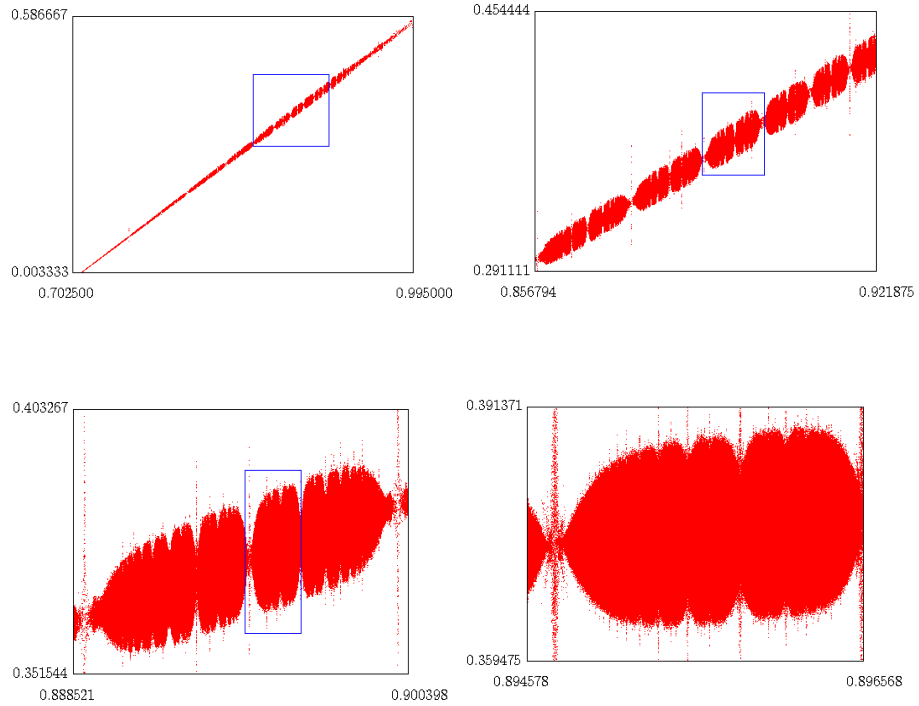


Figura 3: Ampliações sucessivas da figura 2 c)

Também podemos calcular línguas de Arnold para o mapa do círculo forçado. Abaixo temos as línguas de Arnold para numeradores e denominadores de valor até 3:

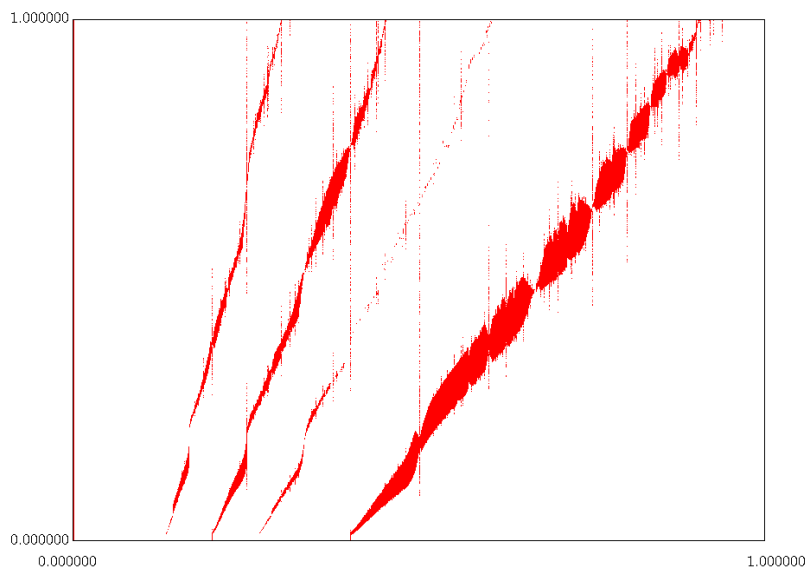


Figura 4: Línguas de Arnold para as frações 0, 1/3, 1/2, 2/3 e 1. Parâmetros  $k = 0.95$  e  $\Omega = 0.4040040004\dots$

## 2.4 Mapa do Círculo sob ação mútua de outro mapa

Vamos analisar agora o mapa do círculo sob ação mútua de outro mapa do círculo, isto é, cada mapa é afetado pelo outro mapa. Consideramos uma interação da forma:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \left(\frac{k}{2\pi}\right) \text{sen}(2\pi\theta_n) + e(\phi_n - \theta_n)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Omega_s - \left(\frac{k}{2\pi}\right) \text{sen}(2\pi\phi_n) + e(\theta_n - \phi_n)$$

Por simplicidade, consideramos o fator não-linear  $k$  igual nos dois mapas. Novamente, fixamos os valores de  $k$  e  $\Omega$  e calculamos o número de rotação para vários valores de  $\Omega_s$  (variando de 0 a 1, eixo horizontal) e do acoplamento  $e$  (variando de 0 a 1, eixo vertical):

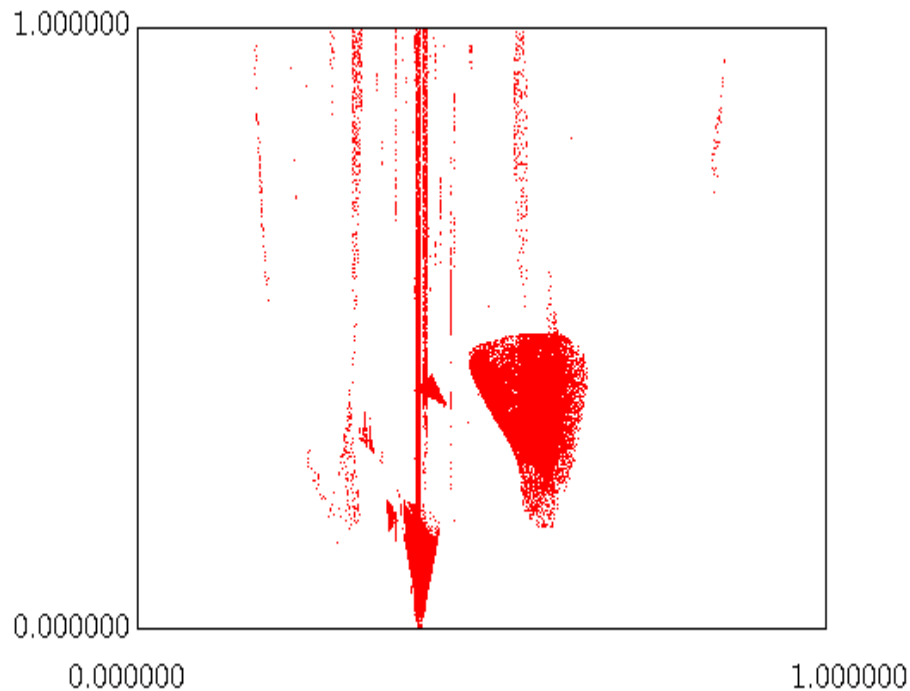


Figura 5(a):  $k = 0.95$  e  $\Omega = 0.4040040004\dots$

Temos, como no caso anterior, algumas regiões onde ocorre sincronização. Contudo, o número de rotação dos mapas não é mais obtido facilmente como no caso da forçante, já que neste caso, ambos os mapas são modificados pela interação.

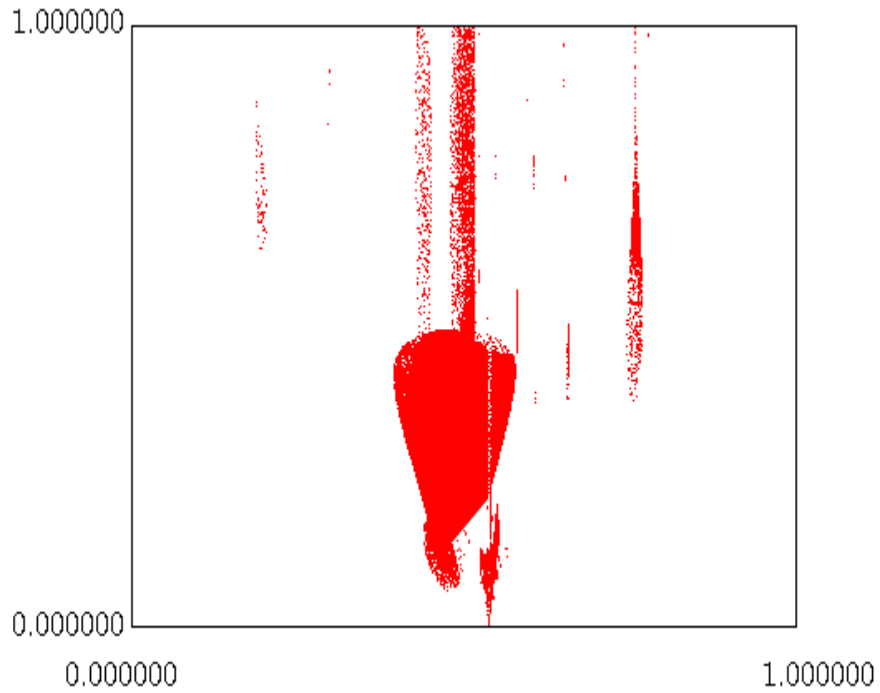


Figura 5(b):  $k = 0.8$  e  $\Omega = 0.535$

Neste caso, de mapas mutuamente acoplados, temos em algumas situações, sincronização “total” (isto é, as fases de ambos os mapas têm valores bastante próximos a partir de certo ponto). A região em azul no diagrama indica que as fases não diferem em mais do que 0.01 nas últimas 200 iterações dos mapas:

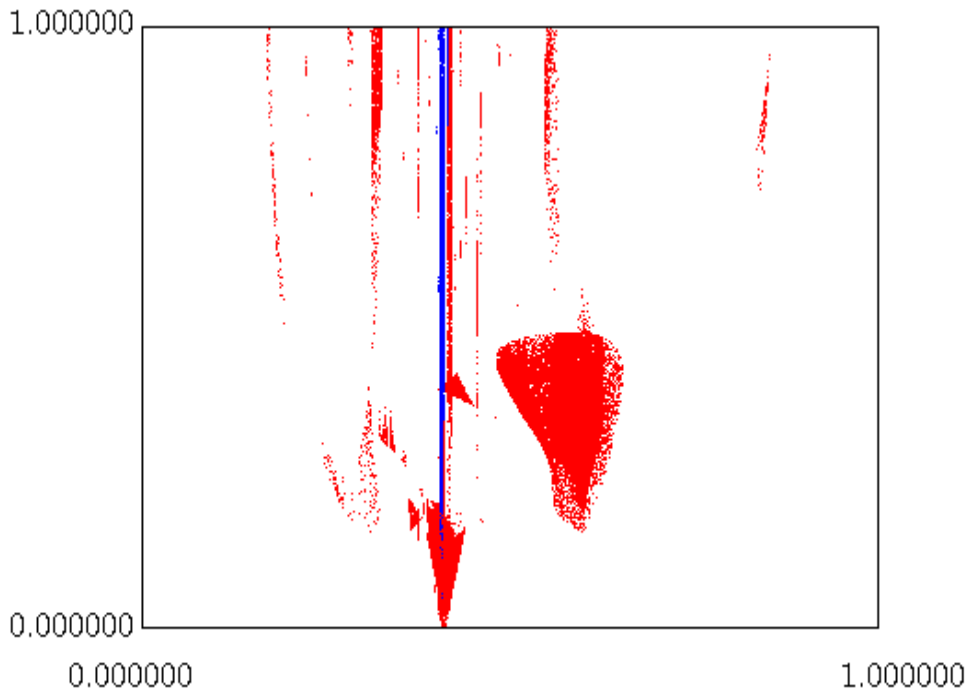


Figura 6: Indicando região em que ocorre sincronização “total”, na situação da figura 4 a)

Como exemplo, indicamos os valores das últimas iterações para  $\Omega_s = 0.405$  e  $e = 0.45333\dots$  na tabela abaixo:

$\theta$	$\phi$	$\theta - \phi$
1.402141	1.401281	0.000860
0.718537	0.718787	-0.000249
1.270907	1.271972	-0.001065
0.525499	0.526731	-0.001231
0.954183	0.956448	-0.002265
1.402141	1.401281	0.000860
0.718537	0.718787	-0.000249

Tabela 1: Valores das últimas iterações para um ponto de sincronização “total”

### 3. DESCRIÇÃO DOS PROGRAMAS

Nesta seção, descrevemos os programas que foram feitos para o estudo do tema.

Os programas foram feitos na linguagem C, por ser uma linguagem em que o autor já possuía uma boa familiaridade. Os programas foram desenvolvidos de modo geral com o compilador Dev C++ 6.0 (Windows) ou eventualmente com o GNU C Compiler (Linux). Como o C não possui bibliotecas gráficas padrão, foi utilizado o conjunto de bibliotecas SDL (Simple Direct MediaLayer), que possui implementações em várias plataformas.

Ambos os programas são bastante semelhantes. Tendo um número de iterações fixado, para cada pixel da tela, os valores correspondentes dos parâmetros  $\Omega_s, e$  são calculados, as fases iniciais para cada um dos mapas são geradas aleatoriamente, e o número de rotação é calculado para estes valores, somando-se as diferenças entre o valor atual da fase e o imediatamente anterior. Os valores da primeira centena de iterações não são considerados, para que o sistema saia de seu regime transitório.

Para verificar a “igualdade” entre os números de rotação, não efetuamos a divisão da soma calculada pelo número de iterações (pois normalmente a divisão tem maiores erros de arredondamento), mas no

primeiro caso comparamos a soma com o número de rotação do mapa forçante multiplicado pelo número de iterações, e no segundo caso, comparamos as duas somas. O teste de igualdade é feito com uma tolerância absoluta ou relativa de 0.001 .

#### 4. CONCLUSÕES

Verificamos então que podemos sincronizar um mapa do círculo através de uma forçante externa, se escolhidos adequadamente o acoplamento e o número de rotação da forçante. No entanto, tal sincronização é somente no sentido de que os números de rotação são bem próximos, ou seja, além de uma diferença constante entre as fases, em pequena escala de tempo, os mapas podem ter comportamentos distintos.

Também ocorre tal sincronização na interação mútua de dois mapas do círculo, mas para alguns valores de parâmetros, foi observada uma sincronização mais forte, em que os valores das fases são bastante próximos a partir de um certo ponto.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

[1]: Baker, G. L. & Gollub, J. P. **Chaotic Dynamics: an introduction**. Cambridge University Press, 1996

[2]: Elert, Glenn. **The Chaos Hypertextbook** (<http://hypertextbook.com/chaos>), acessado em 09/07/08